

Roll No. :

Total No. of Questions : 11]

[Total No. of Printed Pages : 4

ED-2079 (A)

B.Sc. B.Ed. (IInd Year) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I (CC-5)

(Abstract Algebra)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 60

Section-A

(Marks : 2 × 8 = 16)

Note :- Answer all *eight* questions (Answer limit 50 words). Each question carries 2 marks.

(खण्ड-अ)

(अंक : 2 × 8 = 16)

नोट :- सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 50 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

Section-B

(Marks : 4 × 5 = 20)

Note :- Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit 200 words). Each question carries 4 marks.

(खण्ड-ब)

(अंक : 4 × 5 = 20)

नोट :- सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा 200 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Section-C

(Marks : 8 × 3 = 24)

Note :- Answer any *three* questions out of five (Answer limit 500 words). Each question carries 8 marks.

(खण्ड-स)

(अंक : 8 × 3 = 24)

नोट :- पाँच में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा 500 शब्द)। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

BR-1089

(1)

ED-2079(A) P.T.O.

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define Group.
समूह को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Find order of each element of the group $(\{1, 2, 3, 4\}, X_5)$.
समूह $(\{1, 2, 3, 4\}, X_5)$ में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए।
- (iii) Define Coset.
सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Normal Subgroup.
प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Subring.
उपवलय को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Isomorphic Ring.
तुल्याकारी वलय को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Principal Ideal.
मुख्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Define Euclidean Ring.
यूक्लिडीय वलय को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Show that the set $\{1, -1, i, -i\}$ is an abelian group for multiplication.
सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$ गुणन संक्रिया के लिए एक आबेली समूह है।

Or

(अथवा)

Prove that the intersection of any *two* subgroups of a group G is again a subgroup of G .

सिद्ध कीजिए कि समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ G का उपसमूह होता है।

3. Prove that the order of a finite cyclic group is equal to the order of its generator.
सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है।

Or

(अथवा)

If :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Compute the following :

- (i) $\alpha\beta^{-2}$
(ii) $O(\alpha)$

यदि :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

निम्नलिखित का परिकलन कीजिए :

- (i) $\alpha\beta^{-2}$
(ii) $O(\alpha)$

4. If H and K are two normal subgroups of a group G, then prove that $HK \triangleleft G$.
यदि H और K किसी समूह G के दो प्रसामान्य उपसमूह हों तो सिद्ध कीजिए $HK \triangleleft G$.

Or

(अथवा)

Every quotient group of a cyclic group G is cyclic but not conversely true.

एक चक्रीय समूह G का प्रत्येक विभाग समूह भी चक्रीय होता है किन्तु विलोम अनिवार्यतः सत्य नहीं है।

5. Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.

सिद्ध कीजिए कि किसी पूर्णाकीय प्रांत का अभिलक्षण या तो शून्य होता है या अभाज्य संख्या।

Or

(अथवा)

If a be an element of a ring R , then prove that $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$ is a subring of R .

यदि a किसी वलय R का एक अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$ R का एक उपवलय है।

6. Prove that pz is a maximal ideal in $(z, +, \times)$ iff p is prime.

सिद्ध कीजिए $(z, +, \times)$ में pz एक उच्चिष्ठ गुणजावली होती हैं यदि और केवल यदि p अभाज्य हो।

Or

(अथवा)

Prove that every Euclidean ring possesses unity element.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक यूक्लिडीय वलय में इकाई अवयव होता है।

Section-C

(खण्ड-स)

7. Prove that the order of an element a of a group $(G, *)$ is equal to that of its inverse i.e. $o(a) = o(a^{-1})$.

सिद्ध कीजिए कि समूह $(G, *)$ में किसी अवयव a की कोटि उसके प्रतिलोम की कोटि के बराबर होती है अर्थात् $o(a) = o(a^{-1})$.

8. State and prove Lagrange theorem.

लैग्रान्ज प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

9. State and prove fundamental theorem of homomorphism.

समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

10. For any elements a, b of a ring R , prove that :

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(ii) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

किसी वलय R के किन्हीं अवयव a, b के लिए सिद्ध कीजिए :

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

(ii) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

11. Prove that every quotient ring of a ring R is a homomorphic image of R .

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R का प्रत्येक विभाग वलय, R का एक समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।